Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1982

Mathématiques III

OPTION ECONOMIQUE

Vendredi 14 Mai 1982, de 8 heures à midi

(Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.)

PREMIER EXERCICE

On désigne par $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à éléments réels.

On considère les éléments suivants de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\text{ et }K=\begin{pmatrix}4&3&3\\3&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}.$$

1°) Exprimer K comme combinaison linéaire de I et de J. Pour tout entier naturel non nul n, calculer J^n en fonction de J et de n. En déduire K^n. Expliciter les éléments de K^n en numération décimale.

2°) Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ où a et b parcourent $\mathbb{R}$. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

(On rappelle qu'une sous-algèbre d'une algèbre en est exactement une partie non vide, stable pour les lois induites, internes et externe).

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel réel sous-jacent à E ?

3°) Soit $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est M(a,b).

a) Vérifier que $Q=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de B à une base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ constituée par des vecteurs propres de $f_{a,b}$. Préciser la valeur propre associée à chacun de ces vecteurs propres. Déterminer tous les sous-espaces propres et donner leurs dimensions.

b) On désigne par ${}^tQ$ la matrice transposée de Q. Calculer le produit ${}^tQQ$. En déduire la matrice Q^{-1} inverse de Q.

c) Quelle est la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$? Et à l'aide des questions a) et b) calculer $M^n(a,b)$ pour tout entier naturel non nul n.

d) Retrouver ainsi l'expression de K^n obtenue dans la question 1°.

DEUXIÈME EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^{\ln\sqrt{3}}(\text{th}\,x)^n\,dx$, où ln désigne le logarithme népérien.

On rappelle que, pour tout nombre réel x, $\text{th}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On rappelle aussi que la fonction th est strictement croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\text{th}\,x)'=1-(\text{th}\,x)^2$.

1°) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a: $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{\ln\sqrt{3}}{2^n}$. En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

. . . / . . .

2°) Calculer I_0 et I_1.

3°) Montrer que $I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

4°) On considère les séries de termes généraux $u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$, où $n \geqslant 0$, et $v_n = \frac{1}{n2^n}$ où $n \geqslant 1$.

a) Montrer que ces deux séries sont convergentes.

b) En utilisant les questions 2° et 3°, calculer les sommes de ces deux séries.

TROISIÈME EXERCICE

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2. Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir "face" est $p_1, 0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_1 = 1 - p_1$. De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir "face" est $p_2, 0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante: à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce; si le résultat est "face", on joue la deuxième partie avec A_1; si le résultat est "pile", on joue la deuxième partie avec A_2; ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$, on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec A_1 si on a obtenu "face" à la $n^{\text{ième}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie avec A_2 si on a obtenu "pile" à la $n^{\text{ième}}$ partie.

1°) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir "face" à la $n^{\text{ième}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2, en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2.$$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera. Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

2°) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ième}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ième}}$ partie est "face", la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ième}}$ partie est "pile".

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances mathématiques.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

QUATRIÈME EXERCICE

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la loi de probabilité admet une densité f définie, pour tout x réel, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1°) Vérifier que f définit bien une densité de probabilité et la représenter graphiquement.

2°) Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter son graphe.

3°) La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance mathématique? La calculer si elle existe.

4°) Calculer, pour x et a réels, l'expression $F_a(x) = P(X < x / X \geqslant a)$, probabilité conditionnelle de l'événement $\{X < x\}$ sachant que l'événement $\{X \geqslant a\}$ est réalisé.

5°) Soit $a \geqslant 1$, et soit Y la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $Y = aX$. Trouver la fonction de répartition de Y; en déduire sa densité de probabilité. Calculer l'espérance mathématique de Y.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail